Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 2 — 20. Oktober 2022

Aufgabe 1: *(1+1+2+1 Punkte)* Seien A, B Mengen. *Die symmetrische Differenz* $A\Delta B$ von A und B ist gegeben durch

$$A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

(a) Veranschauliche die Definition von $A\Delta B$ durch eine Skizze.

(b) Gilt $A\Delta B = B\Delta A$? Begründe mit Hilfe der Tautologien der Aussagenlogik.

(c) Gilt $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$? Begründe mit Hilfe der Tautologien der Aussagenlogik.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge A_n durch

$$A_n := \{q \in \mathbb{N} \ : \ q \text{ ist ein Teiler von } n\}\,.$$

Bestimme $A_{17}\Delta A_{41}$.

Aufgabe 2: *(1+1+3 Punkte)* In der heutigen Vorlesung wurde die *Mächtigkeit* der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ diskutiert. Zur Illustration wurde das scheinbar paradoxe Gedankenexperiment des *Hilbert-Hotels* — nach dem Göttinger Mathematiker David Hilbert (1862-1943) — besprochen.

Demnach hat das Hilbert-Hotel *abzählbar unendlich viele* Zimmer, durchnummiert mit den natürlichen Zahlen bei der Eins beginnend. Sind alle Zimmer im Hilbert-Hotel belegt, so können dennoch *endlich viele* neue Gäste im Hilbert-Hotel untergebracht werden. Weiterhin wurde in der Vorlesung erklärt, wie man im Hilbert-Hotel sogar für *abzählbar unendlich viele* neue Gäste Platz schaffen kann.

Erkläre nun, wie man im Hilbert-Hotel Platz schaffen kann für

(a) *abzählbar unendlich viele* neue Gäste, die in *endlich vielen* voll besetzten Bussen mit jeweils *abzählbar unendlich vielen* Sitzplätzen ankommen.

(b) *abzählbar unendlich viele* neue Gäste, die in *abzählbar unendlich vielen* voll besetzten Bussen mit einer festen Anzahl an *endlich vielen* Sitzen ankommen, d.h. in jedem dieser voll besetzten Bussen sitzen genau $N \in \mathbb{N}$ Fahrgäste.

(c) *abzählbar unendlich viele* neue Gäste aus *abzählbar unendlich vielen* vollen Bussen.

Gib zu den drei Fällen (a)-(c) jeweils eine passende Abbildungsvorschrift an, mit der

- der Umzug der aktuellen Gäste im Hilbert-Hotel beschrieben wird;
- der Einzug der neuen Gäste in das Hilbert-Hotel beschrieben wird.

Ausgabedatum: 20. Oktober 2022 **Abgabetermin:** 24. Oktober 2022, 10:00 Uhr.